

Задача 9.1

Расшифровать теорему Каруша-Куна-Такера для ОЗЛП.

$$\text{ОЗЛП: } \max_{Ax \leq b} (c, x) = \min_{\substack{\lambda A = c \\ \lambda \geq 0}} (\lambda, b).$$

Теорема Каруша-Куна-Такера (далее ТККТ)

Пусть в задаче математического программирования с регулярным множеством X :

- функции f, g_i выпуклы на R^n ;
- $f, g_i \in C_1(R^n)$;
- $X \neq \emptyset$;
- X регулярно $\forall x \in X$;

Тогда x^0 — точка минимума b в задаче математического программирования с регулярным множеством $X \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0$.

Решение

1 шаг

$$d = \max_{\substack{Ax \leq b \\ x \in R^n}} (c, x) = - \min_{\substack{Ax \leq b \\ x \in R^n}} (-c, x) = - \min_{x \in X} f(x),$$

где

$$f(x) = (-c, x) = - \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

$$X = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0 \forall i = \overline{1, m}\},$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j - b_i) = (a_i, x) - b_i,$$

где a_i — это i -ая строка.

2 шаг

Пусть x^0 — решение $d = \max_{\substack{Ax \leq b \\ x \in R^n}} (c, x) = - \min_{x \in X} f(x)$. Тогда согласно ТККТ это равносильно:

$$\exists \lambda \in R^n \geq 0$$

$$\begin{cases} \text{grad}_x L(x^0, \lambda) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^0) = 0 \end{cases}$$

3 шаг

Распишем последние соотношения подробнее:

Выполнили студенты 321 группы:

Аграновский Михаил

Брызгалов Антон

Мирошник Владислав

Смирнов Александр

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= -(c, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) = -(c, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i ((a_i, x) - b_i) = -(c, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i, x) - \sum_{i=1}^m \lambda b_i \\ &= -(c, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - (b, \lambda) = -(c, x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i a_{ij} x_j - (b, \lambda) \\ &= -(c, x) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j - (b, \lambda) = -(c, x) + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - (b, \lambda) \\ &= -(c, x) + \sum_{j=1}^n x_j (\lambda A)_j - (b, \lambda) = -(c, x) + (\lambda A, x) - (b, \lambda) = (\lambda A - c, x) - (b, \lambda) \end{aligned}$$

Тогда:

$$L(x^0, \lambda) = \text{grad}_x((\lambda A - c, x) - (b, \lambda)) = \lambda A - c = 0 \Rightarrow \lambda A = c$$

$$(\lambda, g(x^0)) = -(b, \lambda) + (\lambda A, x^0) = 0 \Rightarrow (\lambda A, x^0) = (b, \lambda)$$

Итак, x^0 — точка $\max_{\substack{Ax \leq b \\ x \in R^n}} (c, x)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lambda \in R^n \geq 0: \lambda A = c$ и $(\lambda A, x^0) = (b, \lambda)$.

Задача 9.2

Показать, что λ — решение двойственной задачи ЛП.

Решение

Шаг 1

Запишем ТККТ для двойственной задачи к ОЗЛП: $d^* = \min_{\substack{y \in R^m \\ yA = c, y \geq \bar{0}}} (b, y)$.

$$\begin{cases} yA = c \\ y \geq \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yA - c \leq 0 \\ -yA + c \leq 0 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

Пусть

$$f(y) = (b, y)$$

$$g_i(y) = y_i, i = \overline{1, m}$$

$$g_{m+i}(y) = (y, A^i) - c_i, i = \overline{1, n}$$

$$g_{m+n+i}(y) = -(y, A^i) + c_i, i = \overline{1, n},$$

где A^i — это i -ый столбец матрицы A .

y^* — точка $\min_{\substack{y \in R^m \\ yA = c, y \geq \bar{0}}} (b, y) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R^{m+2n}, \lambda \geq 0: \text{grad}_y L(y^*, \lambda) = 0$ и $(\lambda', g(y^*)) = 0$.

Выполнили студенты 321 группы:
Аграновский Михаил
Брызгалов Антон
Мирошник Владислав
Смирнов Александр

$$\begin{aligned} L(y, \lambda') &= (b, y) + \sum_{i=1}^{m+2n} \lambda_i g_i(y) \\ &= (b, y) - \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^n ((y, A^i) - c_i) \lambda_{i+m} + \sum_{i=1}^n (-(y, A^i) - c_i) \lambda_{i+m+n} = (*) \end{aligned}$$

Переобозначим:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1 \in R^m, \lambda_2, \lambda_3 \in R^n$$

Тогда

$$\begin{aligned} (*) &= (b, y) - (\lambda_1, y) + (A\lambda_2, y) - (c, \lambda_2) - (A\lambda_3, y) + (c, \lambda_3) \\ &= (c, \lambda_3 - \lambda_2) + (b - \lambda_1 - A(\lambda_3 - \lambda_2), y) \end{aligned}$$

$$\text{grad}_y L(y^*, \lambda) = b - \lambda_1 - A(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$$

$$(\lambda, g(y^*)) = (c, \lambda_3 - \lambda_2) + (-\lambda_1 - A(\lambda_3 - \lambda_2), y^*) = 0 \Leftrightarrow (c, \lambda_3 - \lambda_2) = (\lambda_1 + A(\lambda_3 - \lambda_2), y^*)$$

Итак, y^* является точкой $\min_{\substack{y \in R^m \\ yA=c, y \geq \bar{0}}} (b, y)$ тогда и только тогда, когда $\exists \lambda_1 \in R^m, \lambda_2, \lambda_3 \in R^n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq$

$0: b - \lambda_1 - A(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$ и $(c, \lambda_3 - \lambda_2) = (\lambda_1 + A(\lambda_3 - \lambda_2), y^*)$, или, переобозначая:

$$\exists \lambda_1 \in R^m, \bar{\lambda} \in R^n, \lambda_1, \bar{\lambda} \geq 0: b - \lambda_1 - A\bar{\lambda} = 0 \text{ и } (c, \bar{\lambda}) = (\lambda_1 + A\bar{\lambda}, y^*)$$

Шаг 2

Покажем, что если:

- $\exists x^0 \in R^n: Ax^0 \leq b$
- $\exists \lambda \in R^m, \lambda \geq \bar{0}: \lambda A = c, (\lambda A, x^0) = (b, \lambda)$

то $\exists y^*, \lambda_1 \in R^m, \bar{\lambda} \in R^n, \lambda_1, \bar{\lambda} \geq 0: -b + \lambda_1 + A\bar{\lambda} = 0$ и $(c, \bar{\lambda}) = (\lambda_1 + A\bar{\lambda}, y^*)$

Переобозначим: $\lambda \equiv y^*$

Имеем: $\exists x^0: Ax^0 \leq b$ и $\exists y^* \in R^m, y^* \geq \bar{0}: \begin{cases} y^* A = c \\ (y^* A, x^0) = (b, y^*) \end{cases}$

Из $\exists x^0 \in R^n: Ax^0 \leq b$ получаем, что $\exists \bar{\lambda} \in R^n, \bar{\lambda} = x^0: A\bar{\lambda} - b \leq 0 \Rightarrow \exists \lambda_1 \in R^m, \lambda_1 \geq 0: A\bar{\lambda} - b + \lambda_1 = 0 \Rightarrow b = A\bar{\lambda} + \lambda_1$.

Из этого следует, что, переобозначая $x^0 = \bar{\lambda}: \exists y^* \in R^m, y^* \geq \bar{0}: (c, \bar{\lambda}) = (b, y^*)$.

Итак, получим: $\exists y^* \in R^m, y^* \geq \bar{0}$ и $\exists \lambda_1 \in R^m, \lambda_1 \geq 0, \exists \bar{\lambda} \in R^n: b = A\bar{\lambda} + \lambda_1$ и $(c, \bar{\lambda}) = (b, y^*)$.

Таким образом, доказано, что если задача ЛП разрешима, то разрешима и двойственная к ней, и в случае разрешимости значения этих задач совпадают:

$$\max_{\substack{Ax \leq b \\ x \in R^n}} (c, x) = (c, x^0) = (b, y^*) = \min_{\substack{y \in R^m \\ yA=c, y \geq \bar{0}}} (b, y),$$

что и требовалось доказать (в силу того, что двойственная к двойственной задаче ЛП совпадает с прямой задачей ЛП).